

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ? (1 punt)
- (b) Calcula la matriu inversa de M . (3 punts)
- (c) Per a $a = 2$, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)
- (d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M , resol l'equació matricial. (3 punts)

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

- (a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 punts)
- (b) Fes un esbós de la gràfica. (1 punt)
- (c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

- (d) Calcula l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x = -2$ i $x = 2$. (4 punts)



Model 3. **Opció A.** Segueix.

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17, \\ 8x - y - 5z = 23, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5, \\ 24x - 2y - 13z = 67. \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)
 - (b) Calcula l'equació vectorial de cada una. (2 punts)
 - (c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directores i el vector diferència, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)
 - (d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)
4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

“Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla”

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

- (a) Calcula la probabilitat del succés $R =$ “bolla extreta vermella” (5 punts).
- (b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).



Model 3

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- (a) calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la “t” indica matriu transposada. (4 punts)
(b) és possible calcular B^2 ? Si ho és, calcula-la. (1 punt)
(c) per als diferents valors de x , calcula el rang de la matriu A . (5 punts)
2. En un aqüari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

on la variable t , que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i $P(t)$ indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps t . Segons el model, calcula:

- (a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020. (1 punt)
(b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)
(c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà. (4 punts)
(d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 punts)

3. Donats els plans

$$\text{(I)} \quad 3x - ay + 2z - (a - 1) = 0, \quad \text{(II)} \quad 2x - 5y + 3z - 1 = 0, \quad \text{(III)} \quad x + 3y - (a - 1)z = 0,$$

- (a) Demuestra que, per a qualsevol valor del paràmetre a , no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)
(b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del paràmetre a . (6 punts)
4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.
- (a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)
(b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)
(c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)



| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$